О трансцендентных числах с последовательными приближениями, определяемыми алгебраическими уравнениями

Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-на-Дону)

§ 1. Лиувилль[1] дал достаточное условие трансцендентности, состоящее в том, что, если неравенство

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n},$$

где $\frac{p}{q}$ — рациональная дробь, имеет место для всякого n при достаточно большом q, то x — число трансцендентное. В своей работе[2] о трансцендентных числах я ставлю аналогичное достаточное условие невыражаемости числа алгебраической функцией от логарифма алгебраического числа и алгебраической функцией от показательных функций алгебраических чисел.

В настоящей статье я намерен исследовать новые проблемы, относящиеся к числам трансцендентным, являющиеся естественным обобщением исследования Лиувилля, но только в другом направлении, чем то, по которому я иду в сейчас упомянутой работе.

Я определяю трансцендентное число приближенными его значениями, но выражаемыми не рациональными дробями, а рядом алгебраических уравнений согласно идее Бореля[3], причем не предполагаю уравнения эти одной степени, как Борель, но постепенно возрастающих степеней, согласно некоторому закону.

От задачи об условиях трансцендентности, т. е. невыражаемости алгебраическим уравнением определенной степени

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = 0 \tag{1}$$

таким образом определяемого числа, я перехожу к условиям, когда число, определяемое одним рядом уравнений

$$a_0^{(g)} + a_1^{(g)} x + a_2^{(g)} x^2 + \ldots + a_{m_g}^{(g)} x^{m_g} = 0, \qquad (1)_g$$

не может быть определено таким же образом другим рядом уравнений

$$b_0^{(j)} + b_1^{(j)} y + b_2^{(j)} y^2 + \ldots + b_{n_j}^{(j)} y^{n_j} = 0. \qquad (2)_j$$

---

[1] „Journal de Liouville", t. XVI; E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris, 1914.

[2] „О некоторых свойствах трансцендентных чисел первого класса", „Матем. сб.", XXIV: 1, 1927 г.

[3] „Comptes rendus", 1889.

В частном случае, нас наиболее интересующем, мы имеем задачу о достаточных условиях несовместности двух трансцендентных уравнений:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m + \ldots = 0 \tag{3}$$

и

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots = 0. \tag{4}$$

К этого рода проблемам принадлежит очень трудная проблема о построении гипертрансцендентного (согласно моей терминологии) числа, т. е. числа, не определимого как решение уравнения

$$y_{x-c} = 0,$$

если $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (f — полином от $x, y, \ldots, y^{(n)}$ с целыми коэфициентами), причем при $x = a$:

$$y = b,\ y' = b^{(1)},\ \ldots,\ y^{n)} = b^{(n)},$$

где a, b, $b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}$, c — рациональные числа. Эту проблему нам не удалось разрешить.

§ 2. Мы должны прежде всего воспроизвести исследование § 7 нашей работы. Одной ссылкой мы не можем ограничиться, в самом ходе выводов нам следует ввести некоторые дополнения и подчеркнуть важные моменты.

Взяв уравнения

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m = 0, \tag{1}$$

$$b_0 + b_1y + b_2y^2 + \ldots + b_ny^n = 0, \tag{2}$$

где a_j, b_j — целые числа, займемся произведением

$$\begin{aligned} P = \ & (y_1 - x_1)(y_1 - x_2)(y_1 - x_3)\ldots(y_1 - x_m) \times \\ & \times (y_2 - x_1)(y_2 - x_2)(y_2 - x_3)\ldots(y_2 - x_m) \times \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times (y_n - x_1)(y_n - x_2)(y_n - x_3)\ldots(y_n - x_m), \end{aligned}$$

где x_g, y_j — корни уравнений (1), (2).

Замечая, что

$$a_m(y_j - x_1)(y_j - x_2)\ldots(y_j - x_m) = a_my_j^m + a_{m-1}y_j^{m-1} + \ldots + a_0,$$

мы можем написать:

$$P = \frac{1}{a_m^{\ n}} \prod_{j=1}^{j=n} (a_my_j^m + \ldots + a_0) = \frac{\Theta}{a_m^{\ n}\, b_n^{\ m}}. \tag{5}$$

Здесь Θ — целая симметрическая функция от y_j и поэтому выражается целой функцией с целыми коэфициентами от a_g, b_j и представляет поэтому целое число.

С другой стороны,

$$P = (-1)^{n-1}(y_1 - x_1)\{(x_1 - y_2)(x_1 - y_3)\ldots(x_1 - y_n)\} \frac{\prod\limits_{j=2}^{j=m}(b_nx_j^n + \ldots + b_0)}{b_n^{\ m-1}}. \tag{6}$$

Если теперь положить $|y_1 - x_1| < \varepsilon$, то будем иметь:

$$\left|\frac{\prod\limits_{j=2}^{j=m}(b_n x_j^n + \ldots + b_0)}{b_n^{m-1}}\right| > \frac{|\Theta|\,\varepsilon^{-1}}{|a_m|^n |b_n|^m H},$$

если

$$|(x_1 - y_2)(x_1 - y_3)\ldots(x_1 - y_n)| < H.$$

Это неравенство мы и будем применять к ряду $(2)_j$ уравнений.

Можно ставить здесь то ограничение, что мы ставим в упомянутой работе. Модули всех корней уравнений $(2)_g$ остаются меньше некоторого конечного, не зависящего от b_k, числа t. В этом случае можно положить

$$H = \{|x_1| + |t|\}^{n-1}$$

не зависящим от $b_k^{(j)}$. Это условие равносильно условию

$$\left|\frac{b_k^{(j)}}{b_n^{(j)}}\right| < E \quad (k = 2, 3, \ldots, n), \tag{7}$$

где E не зависит от j, — в нашей терминологии правильного возрастания $b_k^{(j)}$.

В самом деле, если ни один из корней вместе с j не возрастает, то коэфициенты уравнения

$$y^n + \frac{b_{n-1}^{(j)} y^{n-1}}{b_n^{(j)}} + \ldots + \frac{b_0^{(j)}}{b_n^{(j)}} = 0,$$

выражаемые целыми симметрическими функциями корней, будут оставаться конечными. С другой стороны, предположив, что $\left|\frac{b_k^{(j)}}{b_n^{(j)}}\right| < E$, из уравнения

$$y + \frac{b_{n-1}^{(j)}}{b_n^{(j)}} + \frac{b_{n-2}^{(j)}}{b_n^{(j)} y} + \ldots + \frac{b_0^{(j)}}{b_n^{(j)} y^{n-1}} = 0$$

должны вывести, что

$$\lim_{j=\infty} \frac{b_{n-1}^{(j)}}{b_n^{(j)}} = \infty.$$

Формулу (5) мы обобщаем и для случая, когда вместо условия (7) имеем более общее:

$$\left|\frac{b_k^{(j)}}{b_n^{(j)}}\right| < E(j), \tag{7}$$

где $E(j)$ — известная функция. Мы можем тогда указать для H определенную функцию от j.

Заметим, что

$$H \geqslant |(x_1 - y_2)(x_1 - y_3)\ldots(x_1 - y_n)| = x_1^n + \pi_1 x_1^{n-1} + \ldots + \pi_{n-1},$$

$$|\pi_1| = \left|\frac{b_{n-1}^{(j)}}{b_n^{(j)}} - y_1\right| < \left|\frac{b_{n-1}^{(j)}}{b_n^{(j)}}\right| + \bar{y}_1,$$

$$|\pi_2| = \left|\frac{b_{n-2}^{(j)}}{b_n^{(j)}} - y_1\pi_1\right| < \left|\frac{b_{n-2}^{(j)}}{b_n^{(j)}}\right| + \left|\frac{b_{n-1}^{(j)}}{b_n^{(j)}}\right| \bar{y}_1 + \bar{y}_1^2,$$

. . . .

$$|\pi_k| = \sum_{g=0}^{g=k-1} \left| \frac{b_{n-g}^{(j)}}{b_n^{(j)}} \right| \overline{y}_1^{\,k-1-g} < E(j) |\overline{y}_1|^{n-1}(k+1),$$

. . . .

где $|\overline{y_1}|$ равен 1, если $|y_1| \leqslant 1$, и $\overline{y_1}$ — наибольшее значение $|y_1|$, если $|y_1| > 1$. Отсюда получаем

$$H = Cn(n+1)E(j), \tag{8}$$

где C не зависит ни от m, ни от j.

Неравенство (5) дает:

$$\{|b_0^{(j)}| + |b_1^{(j)}| + \ldots + |b_n^{(j)}|\}^{m-1} |\overline{x}|^{mn} > \frac{|\Theta| \, |b_0^{(j)}|^{-1} \varepsilon^{-1}}{|a_m|^n H},$$

где $|\overline{x}|$ — наибольший из модулей $|x_j|$, если этот модуль больше единицы, и единица — в противном случае.

Замечая, что

$$|b_0^{(j)}| + |b_1^{(j)}| + \ldots + |b_n^{(j)}| > |b_n^{(j)}|,$$

имеем:

$$|b_0^{(j)}| + |b_1^{(j)}| + \ldots + |b_n^{(j)}| > A\varepsilon^{-\frac{1}{m}}, \tag{9}$$

где

$$A = \sqrt[m]{\frac{1}{|a_m|^n H |\overline{x}|^{mn}}}, \tag{10}$$

откуда

$$\varepsilon > \frac{B|\Theta|}{b^{(j)\,m} E(j)}, \tag{11}$$

где B не зависит от j, а $|\Theta|$ — целое число,

$$b^{(j)} = |b_0^{(j)}| + |b_1^{(j)}| + \ldots + |b_n^{(j)}|$$

— высота уравнения $(2)_j$.

Из (4) выводится достаточное условие трансцендентности в простейшем случае независимости $H(j)$ от j.

Если число x определяется приближенно корнями уравнений определенной степени m с целыми коэфициентами, правильно изменяющимися:

$$b_0^{(j)} y^n + b_1^{(j)} y^{n-1} + \ldots + b_1^{(j)} \ y + b_0^{(j)} = 0, \tag*{$(2)_j$}$$

в которых $b_n^{(j)}$ при достаточно большом j может быть сделано как угодно велико, то число x не определяется приводимым уравнением m-й и ниже степени, если при достаточно больших m:

$$|y - x| < \frac{1}{(b^{(j)})^{m+1}}, \tag{12}$$

где $b^{(j)}$ — высота уравнения.

Число x трансцендентно, если для всякого m и при достаточно большом j:

$$|y - x| < \frac{1}{(b^{(j)})^{m}}. \tag{12'}$$

В общем случае, если характер возрастания определяется неравенством $(7)_j$, неравенства (12) и (12′) заменяются следующими:

$$|y-x| < \frac{1}{(b^{(j)})^{m+1} E(j)}, \qquad (12)_j$$

$$|y-x| < \frac{1}{(b^{(j)})^{m} E(j)}. \qquad (12')_j$$

В самом деле, неравенство (11) дает:

$$\varepsilon > \frac{B}{(b^{(j)})^m E(j)},$$

а (12):

$$\varepsilon < \frac{1}{(b^{(j)})^{m+1} E(j)},$$

так что

$$\frac{1}{(b^{(j)})^{m+1}} > \frac{B}{(b^{(j)})^m},$$

или

$$(b^{(j)}) < B^{-1},$$

что при достаточно большом $b_n^{(j)}$ или j невозможно.

§ 3. Первый шаг к обобщениям: замена уравнений $(1)_g$, $(2)_j$ с целыми коэфициентами уравнениями

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m = 0, \qquad (13)$$

$$d_0^{(j)} + d_1^{(j)} y + d_2^{(j)} y^2 + \ldots + d_n^{(j)} y^n = 0 \qquad (14)$$

с дробными, замечая, что эти уравнения, если положить

$$c_k = \frac{\gamma_k}{\alpha_k}, \qquad \alpha_k^{(j)} = \frac{\delta_k^{(j)}}{{}^{(j)}_{n}},$$

где α_m — общий знаменатель c_j $(j=0, 1, \ldots, m)$, β_n — общий знаменатель d_j $(j=0, 1, 2, \ldots, n)$, мы заменяем уравнениями с целыми коэфициентами

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_m x^m = 0, \qquad (15)$$

$$\delta_0^{(j)} + \delta_1^{(j)} y + \delta_2^{(j)} y^2 + \ldots + \delta_n^{(j)} y^n = 0 \qquad (16)$$

и применяем формулу (11), которая дает:

$$\varepsilon > \frac{1}{|\alpha_m|^n |c_m|^n | \;{}^{(j)}_{n}|^m |\sigma^{(j)}|^m Cn(n+1) E(j)}, \qquad (17)_j$$

где

$$\sigma^{(j)} = \sum_{s=0}^{s=n} |d_s^{(j)}|.$$

Будем теперь применять эту формулу не к одному определенному уравнению (1), но к ряду $(1)_g$, предполагая, что m_g растет с g, а n_j с j. Тогда вместо $(17)_j$ будем иметь:

$$\varepsilon > \frac{1}{|\alpha_m^{(g)}|^{n_j} |c_{m_g}^{(g)}|^{n_j} |\beta_{n_j}^{(j)}|^{m_g} |\sigma^{(j)}|^{n_j} Cn_j(n_j+1) E(j)}. \qquad (17)_{jgE}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться ею при условии, что значения $c_m^{(g)}$ и σ_j ограничены числом, не зависящим от j и g. Нетрудно видеть, что тогда будем иметь:

$$\varepsilon > \frac{1}{M^{n_j} N^{m_g} \left| \alpha_m^{(g)} \right|^{n_j} \left| \beta_{n_j}^{(j)} \right|^{m_g} E(j)}, \tag{18)$_{jgE}$ $$

где M, N не зависят от j и g, а если $E(j)$ не зависит от j, то

$$\varepsilon > \frac{1}{M^{n_g} N^{m_g} \left| \alpha_m^{(g)} \right|^{n_j} \left| \beta_n^{(j)} \right|^{m_g}}. \qquad (18)_{jg}$$

Отсюда сейчас же выводится, что если будет доказано, что, начиная с достаточно больших g, j, ε не равно нулю и удовлетворяет неравенству:

$$\varepsilon < \frac{1}{\left| \alpha_{m_g}^{(g)} \right|^{n_j} \left| \beta_{n_j}^{(j)} \right|^{m_g} T}, \qquad T = M^{n_j} N^{m_g}, \qquad (19)_{jg}$$

то будет доказано, что одно и то же число не может определяться одновременно системами $(1)_g$ и $(2)_j$.

В частном случае, нас наиболее интересующем, когда число определяется трансцендентными уравнениями (3) и (4), мы будем иметь условием их несовместимости:

$$\varepsilon < \frac{1}{|\alpha_m|^n |\beta_n|^m T}, \qquad T = M^n N^m, \qquad (19)$$

где α_m — общий знаменатель $a_0, a_1, \ldots, a_m$, β_n — общий знаменатель $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Для того, чтобы использовать это неравенство для определенных выводов, необходимо указать путь, который мог бы привести к другому, непосредственно вытекающему из разложений (3) и (4), неравенству, из которого (19) выводилось бы как следствие. Мы должны здесь рассмотреть не первое основное неравенство Лиувилля, лежащее в основе его и наших исследований, а в т о р о е, отмеченное в § 3 нашей работы, которое читатель легко выведет сам.

В случае простого корня $f(x) = 0$

$$|a - x_0| \leqslant \frac{|f(a)|}{m}, \qquad (20)$$

где

$$m = \min |f'(x)| \quad \text{при} \quad a \gtreqless x \gtreqless x_0,$$

а в случае кратных корней аналогичным образом:

$$|a - x_0| < \frac{\sqrt[p]{|f(a)|}}{|m_p|}, \qquad (20)_p$$

где

$$m = \min \left| \frac{f^{(p)}(x)}{p!} \right|.$$

Предположим, что уравнениями (3) и (4) определяется то же число ξ. Мы можем написать:

$$|x_m - y_n| \leqslant |x_m - \xi| + |y_n - \xi|, \qquad (21)$$

и далее, на основании обращенного неравенства Лиувилля (20), $(20)_p$:

$$|x_m-\xi|<\frac{\sqrt[p_m]{|A_m|}}{\left|\Phi_m^{(p_m)}\right|}, \tag{22}$$

$$|y_n-\xi|<\frac{\sqrt[q_n]{|B_n|}}{\left|\Psi_n^{(q_n)}\right|}. \tag{23}$$

Здесь p_m, q_n, как порядки нуля голоморфной функции, ограничены числами p и q, не зависящими от j, g (т. е. m и n). $\left|\Phi_m^{(p)}\right|$, $\left|\Psi_n^{(q)}\right|$ ограничены снизу числами, не зависящими от m и n. A_m, B_n представляют остаточные члены разложений (3) и (4). Таким образом несовместимость трансцендентных уравнений (3) и (4) доказывается наличностью для m, n, превосходящих некоторую границу, неравенства:

$$\frac{\sqrt[p]{|A_m|}}{P}+\frac{\sqrt[q]{|B_n|}}{Q}<\frac{1}{|\alpha_m|^n|\beta_n|^m T},$$

или, если заметить, что левая часть последнего неравенства меньше или равна

$$\frac{\sqrt[r]{|C_{m,n}|}}{R},$$

где r — наибольшее из чисел p, q, $|C_{m,n}|$ из чисел P, Q — наименьшее,

$$\frac{\sqrt[r]{|C_{m,n}|}}{R}<\frac{1}{|\alpha_m|^n|\beta_n|^m T}. \tag{24}$$

Что касается до остаточных членов (3) и (4) A_m и B_n, то в общем случае они могут быть определены, если известно k такое, что

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|<k<1.$$

А именно, тогда

$$|a_{m+1}x^{m+1}+\ldots|<|a_{m+1}|\{1+k|x|+k^2|x|^2+\ldots\}|x|^{m+1}<\frac{|a_{m+1}||x|^{m+1}}{1-k|r|}.$$

В случае знакопеременного ряда

$$\varphi_0-\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3+\ldots+\varphi_m-\varphi_{m+1}+\ldots \tag{25}$$

дело обстоит проще:

$$|A_m|<\varphi_{m+1}, \tag{26}$$

и также

$$|B_n|<\psi_{n+1}.$$

Неравенство (24) выполнится, если будут выполнены следующие неравенства:

$$\sqrt[k]{|\varphi_{m+1}|}<\frac{R}{|\alpha_m|^n|\beta_n|^m T}, \tag*{$(27)_\varphi$}$$

$$\sqrt[k]{|\psi_{n+1}|}<\frac{R}{|\alpha_m|^n|\beta_n|^m T}. \tag*{$(27)_\psi$}$$

Мы можем построить разложения (3) и (4), удовлетворяющие этим условиям $(27)_\varphi$ и $(27)_\psi$.

§ 4. Дадим некоторые общие указания относительно построения таких разложений. Полагая

$$a_g=\frac{\lambda_g}{f_g},\quad b_j=\frac{\mu_j}{h_j},$$

где f_g растет с g, а h_j с j, мы полагаем (при некотором законе возрастания зависимых друг от друга m и n):

$$\lim_{\substack{m=\infty\\ n=\infty}}\frac{f_{m+1}:\theta(m,n)}{(f_1f_2\ldots f_m)^{nk}(h_1h_2\ldots h_n)^{mk}}=\infty, \tag{28$_m$}$$

$$\lim_{\substack{m=\infty\\ n=\infty}}\frac{f_{n+1}:\theta(m,n)}{(f_1f_2\ldots f_m)^{nk}(h_1h_2\ldots h_n)^{mk}}=\infty, \tag{28$_n$}$$

где k — какое угодно число, большее единицы, не зависящее от m, n, $\theta(m,n)$ — такая функция, что при достаточно больших m, n:

$$\lambda_{m+1}<\theta(m,n), \tag{29$_m$}$$

$$\mu_{n+1}<\theta(m,n). \tag{29}$$

Имея в виду, что в силу $(28)_m$ и $(28)_n$ (при достаточно больших m, n):

$$\frac{1}{f_{m+1}}<\frac{1}{(f_1f_2\ldots f_m)^{nk}(h_1h_2\ldots h_n)^{mk}\theta(m,n)}<$$
$$<\frac{1}{T(f_1f_2\ldots f_m)^{nl}(h_1h_2\ldots h_n)^{ml}\theta(m,n)},\quad l>1,$$

и $(29)_m$, выводим $(27)_\varphi$, таким же образом выводим и $(27)_\psi$, имея в виду, что $f_1f_2\ldots f_m\leqslant\alpha_m$, $h_1h_2\ldots h_n\leqslant\beta_n$.

Если положить:

$$a_m=\frac{\omega(m)}{[\varphi(m)]^{\vartheta(m)}}, \tag{30$_m$}$$

$$b_n=\frac{\varepsilon(n)}{[\varphi(n)]^{\vartheta(n)}},\qquad \omega(m)\neq\varepsilon(m), \tag{30$_n$}$$

где $\omega(m)$, $\varepsilon(n)$ таковы, что

$$\omega(m+1)<[\varphi(m)]^{\rho}, \tag{31$_m$}$$

$$\varepsilon(n+1)<[\varphi(n)]^{\sigma}, \tag{31$_n$}$$

при ρ, σ, не зависящих от m, n, то $\vartheta(n)$ таково, что

$$\vartheta(n+1)>n\vartheta(n), \tag{32}$$

например,

$$\vartheta(n)=n^n.$$

Возьмем $m=n$. Нетрудно видеть, что условия (28) и (29) выполняются, так как

$$\frac{[\varphi(n+1)]^{\vartheta(n+1)}}{[\varphi(n)]^{kn\vartheta(n)}[\varphi(n)]^{\tau}}>\frac{[\varphi(n)]^{\vartheta(n)}}{[\varphi(n)]^{(k+1)n\vartheta(n)}},$$

а правая часть имеет пределом ∞, на основании условия (32). Таким образом можно доказать, например, несовместимость уравнений:

$$\sum_{g=0}^{g=\infty}\frac{(-1)^g x^g}{(g^2+1)g^g}=0$$

и

$$\sum_{g=0}^{g=\infty} \frac{(-1)^g (g^2-1)^{\frac{1}{g}} x^g}{(g^2+1) g^g} = 0.$$

Конечно, следует еще доказать, что:

1) разложения (3) и (4) при значениях $(30)_m$ и $(30)_n$ коэфициентов определяют голоморфную в некоторой области Ω функцию, которая окажется целой на всей плоскости на основании известного признака Коши-Адамара,

2) в области Ω и, более того, в области ω, в нее входящей и более точно определенной, существуют нули этих функций.

Это мы предоставляем читателю.

§ 5. Идем дальше по пути обобщений. Рассмотрим теперь случаи, когда коэфициенты не являются целыми натуральными числами, а зависят от целых алгебраических чисел:

$$\zeta^s + \omega_1 \zeta^{s-1} + \omega_2 \zeta^{s-2} + \ldots + \omega_s = 0, \tag{33'}$$

где ω — целые числа, так что

$$a_p^{(j)} = \sum_{k=0}^{k=s-1} a_p^{(gk)} \zeta^k, \tag{34}$$

$$b_q^{(j)} = \sum_{k=0}^{k=s-1} b_q^{(jk)} \zeta^k, \tag{35}$$

где $a_p^{(gk)}$, $b_q^{(jk)}$ — целые числа.

В этом случае в неравенстве (11) Θ — уже не целое число, а полином от ζ с коэфициентами, равными полиномам от $a_p^{(gk)}$, $b_q^{(jk)}$ с целыми коэфициентами.

Из неравенства (11) выводим:

$$|b_m (x_1 - y_1)(x_1 - y_2) \ldots (x_1 - y_n)| > \frac{B\,|\theta|}{b^{(j)\,m} a_m^{(g)n}},$$

где θ — целое число, а B не зависит от m, n. Поэтому

$$|\Theta| > \frac{B\,|\theta|}{S^s}. \tag{36}$$

Здесь θ — целое число, S представляет сумму абсолютных значений коэфициентов Θ. Степень полинома Θ относительно ζ обозначим через μ. Постараемся теперь определить высшую границу для суммы абсолютных значений коэфициентов Θ: $\overline{S}$. Для этого найдем сперва такое число для одного члена

$$a_0^{(g)k_0} a_1^{(g)k_1} \ldots b_0^{(j)l_0} b_1^{(j)l_1} \ldots$$

Если ввести обозначения:

$$\gamma_p^{(g)} = \sum_{k=0}^{k=s-1} |a_p^{(gk)}|, \tag{37$_p$}$$

$$\delta_q^{(j)} = \sum_{k=0}^{k=s-1} |b_q^{(jk)}|, \tag{37$_q$}$$

то получим, что искомое число

$$\gamma_0^{(g)^{k_0}}\gamma_1^{(g)^{k_1}}\ldots\delta_0^{(j)^{l_0}}\delta_1^{(j)^{l_1}}\ldots<\gamma^{(g)^n}\delta^{(j)^m}, \tag{38}$$

где $\gamma^{(g)}$, $\delta^{(j)}$ — наибольшие значения сумм абсолютных значений коэфициентов $a_p^{(g)}$ и $b_q^{(j)}$. Задачу об ограничении $\overline{S}$ разрешим, если будем знать высшую границу для суммы коэфициентов в результанте уравнений (1) и (2):

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m=0, \tag{1}$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n=0. \tag{2}$$

Вспомним правило образования результанта в случае равных степеней $m=n$ [1]. Результант получается из ряда определителей:

$$\begin{vmatrix} (a_nb_{n-1})(a_nb_{n-2})(a_nb_{n-3})\ldots & (a_nb_2)(a_nb_1)(a_nb_0) \\ (a_nb_{n-2})(a_nb_{n-3})(a_nb_{n-4})\ldots & (a_nb_1)(a_nb_0)(a_{n-1}b_0) \\ (a_nb_{n-3})(a_nb_{n-4})(a_nb_{n-5})\ldots & (a_nb_0)(a_{n-1}b_0)(a_{n-2}b_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_nb_1)(a_nb_0)(a_{n-1}b_0)\ \ldots & (a_4b_0)(a_3b_0)(a_2b_0) \\ (a_nb_0)(a_{n-1}b_0)(a_{n-2}b_0)\ \ldots & (a_3b_0)(a_2b_0)(a_1b_0) \end{vmatrix}, \tag{f}$$

где $(a_jb_k)=a_jb_k-a_kb_j$,

$$\begin{vmatrix} (a_{n-1}b_{n-2})(a_{n-1}b_{n-3})\ \ldots & (a_{n-1}b_1) \\ (a_{n-1}b_{n-3})(a_{n-1}b_{n-4})\ldots & (a_{n-2}b_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ (a_{n-1}b_2)(a_{n-1}b_1)\ \ldots & (a_3b_1) \\ (a_{n-1}b_1)(a_{n-2}b_1)\ \ldots & (a_2b_1) \end{vmatrix}, \tag{ff}$$

$$\begin{vmatrix} (a_{n-2}b_{n-3})\ldots & (a_{n-2}b_2) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ (a_{n-2}b_2)\ \ldots & (a_3b_2) \end{vmatrix}. \tag{fff}$$

В ряду (f), (ff), (fff),... начинаем с последнего и предпоследнего, вычеркнув первые и последние строки и столбцы предпоследнего, прибавляем к элементам остающегося определителя соответственные элементы последнего (состоящего из одного или 4 элементов) и восстановляем вычеркнутые столбцы и строки. Та же операция производится со следующим с конца определителем и только что полученным и т. д. до (f). В результате число слагаемых (a_jb_k) в элементе окончательного определителя окажется не больше, чем число таких слагаемых в среднем элементе, т. е. не больше числа определителей в указанном выше ряду

$$N=E\left(\frac{n+1}{2}\right)<\frac{n+1}{2}.$$

После развертывания определителя членов

$$\Pi\,(a_jb_k)^{g_{jk}}$$

[1] Ващенко-Захарченко, Алгебраический анализ или Высшая алгебра, § 170. Метод Безу, стр. 268—270.

окажется не больше $n!\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, а членов

$$a_0^{k_0}a_1^{k_1}\ldots b_0^{l_0}b_1^{l_1}\ldots$$

— не больше $n!(n+1)^n$.

Случай неравных степеней сводится к рассмотренному, если положить в одном из уравнений ряд старших коэфициентов нулем, через что число членов в окончательном определителе может только уменьшиться. Если τ — наибольшее из чисел (m, n), то число членов в Θ не больше $\tau!(\tau+1)^\tau$.

На основании формулы Стирлинга при достаточно больших n

$$\tau! < \left(\frac{\tau}{e}\right)^\tau \sqrt{2\pi\tau}\, e^{\frac{1}{2\tau}} < \tau^{\tau+\frac{1}{2}}. \tag{39}$$

Далее, нетрудно видеть, что можно принять, что

$$(\tau+1)^\tau < \tau^{\tau+\frac{1}{2}}. \tag{40}$$

Из (39) и (40) имеем:

$$\rho < \tau^{2\tau+1}, \quad s < \tau^{2\tau+1}\gamma^{(g)^n}\delta^{(j)^m}. \tag{41}$$

Неравенство (36) теперь приводится к виду:

$$|\Theta| > \frac{B|\theta|}{\tau^{(2\tau+1)s}\gamma^{(g)ns}\delta^{(j)ms}},$$

а вместо (11) имеем следующее:

$$\varepsilon > \frac{B|\theta|}{\gamma^{(g)ns}\delta^{(j)ms}\tau^{(2\tau+1)s}\left|a_{m_g}^{(g)}\right|^{n_j}\left|b^{(j)}\right|^{m_g}}.$$

Изменяя вместе с g, j m, n, а также и s, беря, таким образом, вместо (33')

$$\zeta^{(j)^s} + \omega_1^{(j)}\zeta^{(j)^{s-1}} + \ldots + \omega_s^{(j)} = 0 \tag{33$_j$}$$

и заменяя $m_g + n_j$ через $2\tau_{jg}$, где τ_{jg} — наибольшее из m_g, n_j число, имеем:

$$\varepsilon > \frac{B|\theta|}{\left(\gamma^{(g)}\delta^{(j)}\tau_{jg}\right)^{(2\tau_{jg}+1)s_{\tau_{jg}}}\left|a_{m_g}^{(g)}\right|^{n}\left|b^{(j)}\right|^{m_g}}, \tag{42}$$

где $s_{\tau_{jg}}$ — наибольшее из чисел s_j и s_g.

§ 6. Положим теперь, что вместо уравнения (33) имеем:

$$\omega_s\zeta^s + \omega_{s-1}\zeta^{s-1} + \ldots + \omega_0 = 0, \tag{43}$$

а вместо (34) и (35):

$$a_p^{(g)} = \frac{1}{\alpha_p}\sum_{k=0}^{k=s-1} c_p^{(gk)}\zeta^k,$$

$$b_q^{(j)} = \frac{1}{\beta_q}\sum_{k=0}^{k=s-1} d_q^{(jk)}\zeta^k;$$

совершенно так же, как в § 1, получаем вместо (42):

$$\varepsilon > \frac{B|\theta|}{\left|\alpha_{m_g}^{(g)}\right|^{n_j}\left|\beta_{n_j}^{(j)}\right|^{m_g}\left|\gamma^{(g)}\delta^{(j)}\tau_{jg}\right|^{(2\tau_{jg}+1)S_{\tau_{jg}}}\left|c_{m_g}^{(g)}\right|^{n_j}\left|\sigma^{(j)}\right|^{n_g}\left|\omega_0^{(\tau_{jg})}\right|^{2\tau_{jg}S_{\tau_{jg}}}}.$$

Неопределимость числа, определяемого системой $(2)_j$, будет иметь место, если, начиная с достаточно больших g и j, всегда будет:

$$\varepsilon < \frac{B}{\left|\alpha_{m_g}^{(g)}\right|^{n_j}\left|\beta_{n_j}^{(j)}\right|^{m_g}\left|\gamma^{(g)}\delta^{(j)}\tau_{jg}\right|^{(2\tau_{jg}+1)s_{\tau_{jg}}}\left|c_{m_g}^{(g)}\right|^{m_j}\left|\sigma^{(j)}\right|^{m_g}\left|\omega_0^{(\tau_{jg})}\right|^{2\tau_{jg}s_{\tau_{jg}}}},$$

где B не зависит от j, g. Если остановиться на случаях разложений (3) и (4) с алгебраическими коэфициентами a_p, b_q, то будем иметь:

$$\varepsilon < \frac{1}{|\alpha_n|^n \, |\beta_n|^m \, |\gamma^{(g)}\delta^{(j)}\tau_{jg}|^{(2\tau_{jg}+1)s_{\tau_{jg}}} \, |\omega_0^{(\tau_{jg})}|^{2\tau_{jg}s_{\tau_{jg}}} \, T}, \qquad (44)$$

$$T = M^n N^m$$

(M, N не зависят от m, n). В этом случае неравенства (28) заменяются следующими:

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \frac{f_{m+1} : \theta(m, n)}{(f_1 f_2 \ldots f_m)^{nk} (h_1 h_2 \ldots h_n)^{mk} \left(\gamma^{(g)} \delta^{(j)} \tau_{jg}\right)^{(2\tau_{jg}+1)s_{\tau_{jg}}} |\omega_0^{(\tau_{jg})}|^{2\tau_{jg}s_{\tau_{jg}}}} = \infty, \qquad (45)$$

и такое же с заменой f на h. Конечно, можно выбрать такого характера возрастания ω_n, $\gamma^{(g)}$, $\delta^{(j)}$ и s_τ, при котором построенные в § 3 разложения уже не будут являться обоснованным примером несовместности двух трансцендентных уравнений.

Ростов-на-Дону. 24/X 1933.

(Поступило в редакцию 1/XI 1933 г.)

Sur les nombres transcendants dont les approximations successives sont définies par des équations algébriques

D. Mordoukhay-Boltovskoy (Rostov sur Don)

(Résumé)

L'article donne des conditions suffisantes pour la compatibilité de deux équations:

$$a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots + (-1)^m a_m x^m + \ldots = 0,$$
$$b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - \ldots + (-1)^n b_n x^n + \ldots = 0$$

(a_i, b_i étant rationnels), qui consistent dans les inégalités suivantes:

$$\sqrt[k]{|a_{m+1}|} < \frac{R}{|\alpha_m|^n \, |\beta_n|^m \, T},$$
$$\sqrt[k]{|b_{n+1}|} < \frac{R}{|\alpha_m|^n \, |\beta_n|^m \, T},$$
$$k \geq 1, \; T = M^n N^m;$$

M, N, R ne dépendent pas de (m, n), α_m, β_n sont les dénominateurs communs des

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m,$$
$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

On obtient ces résultats comme un cas particulier d'un théorème général sur l'exprimabilité d'un nombre transcendant donné par le système $(1)_g$ au moyen d'un autre système analogue $(2)_j$.

L'article contient aussi la généralisation des résultats obtenus pour le cas où a_g, b_j sont des nombres algébriques.
